Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Journal of Algebra 320 (2008) 2675–2694
JOURNAL OF Algebra
www.elsevier.com/locate/jalgebra

Sur la catégorie des bimodules de Soergel

Nicolas Libedinsky

UFR de Mathématiques et Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Reçu le 31 août 2007

Disponible sur Internet le 14 juillet 2008

Communiqué par Michel Broué

Para Javi, mi hoja ligera

Résumé

La catégorie **B** de Soergel d'un système de Coxeter $(W, \mathcal{S})$ est une catégorie de bimodules sur une algèbre de polynômes sur laquelle W agit. C'est une catégorification de l'algèbre de Hecke de $(W, \mathcal{S})$. Dans cet article nous donnons une description combinatoire des espaces de morphismes dans **B**. En corollaire, on obtient une description analogue des morphismes dans $\mathcal{O}_0$-proj, où $\mathcal{O}_0$ est le bloc principal de la catégorie $\mathcal{O}$ de **BGG**.

Keywords: Soergel's bimodules; Kazhdan–Lusztig theory; Lusztig's conjecture; Khovanov–Rozansky homology

1. Introduction

En 1980, Kazhdan et Lusztig ont posé leur célèbre conjecture de positivité [9]. Si $(W, \mathcal{S})$ est un système de Coxeter et $\mathcal{H}$ son algèbre de Hecke, cette conjecture dit que certains polynômes de changement de base dans $\mathcal{H}$ (les polynômes de Kazhdan–Lusztig) ont des coefficients positifs. Ces polynômes ont donné naissance à ce qu'on appelle la théorie de Kazhdan–Lusztig, qui s'est avérée avoir des liens profonds avec la géométrie, les représentations et la combinatoire.

En 1992 [14] Soergel a catégorifié $\mathcal{H}$, c'est à dire qu'il a défini une catégorie tensorielle **B** et un isomorphisme d'anneaux ε de $\mathcal{H}$ vers le groupe de Grothendieck scindé de **B**. Il a alors posé une conjecture (2.9 ci-dessous) qui relie, via ε, les éléments de la base de Kazhdan–Lusztig avec les éléments indécomposables de **B**. Cette conjecture implique la conjecture de positivité de Kazhdan–Lusztig.

Adresse e-mail : libedinsky@math.jussieu.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2008.05.027

Historiquement, Soergel a introduit cette catégorie dans le cas des groupes de Weyl pour relier la catégorie $\mathcal{O}$ d'une algèbre de Lie semisimple complexe et les faisceaux pervers sur les variétés de drapeaux. Le lien avec la géométrie lui a permis de démontrer sa conjecture dans le cas des groupes de Weyl, et il en a déduit une nouvelle preuve de la conjecture de Kazhdan–Lusztig, démontrée auparavant par Beilinson et Bernstein [1] et par Brylinski et Kashiwara [3].

Par ailleurs, dans un article récent [10], Khovanov montre qu'à partir de certains complexes dont les termes appartiennent à **B**, on retrouve l'homologie réduite définie dans [11], qui est un invariant de noeuds et dont la caractéristique d'Euler est le polynôme HOMFLYPT.

Dans la section 2 de cet article, nous donnons l'énoncé précis du théorème de Soergel, de la conjecture de positivité de Kazhdan–Lusztig ainsi que de la conjecture de Soergel, en expliquant à chaque fois quelles parties de ces conjectures ont été prouvées. Dans tous les cas (sauf pour les groupes de Coxeter universels), les parties de ces conjectures qui sont résolues, sont les cas où on peut associer une géométrie. C'est pour cela en partie que cette approche algébrique de Soergel est particulièrement intéressante.

Dans la section 3, nous exposons les résultats déjà connus qui nous intéressent sur les espaces d'homomorphismes de la catégorie **B**. Tous ces résultats sont explicites ou implicites dans l'article de Soergel [16]. Le théorème fondamental de cette section est le théorème 3.4, qui donne les dimensions graduées de ces espaces d'homomorphismes (corollaire 4.2).

Dans la section 4, nous définissons la « base des feuilles légères » (BFL), qui est un sous-ensemble de ces espaces d'homomorphismes. On peut regarder la construction de la section 4 comme une catégorification de la formule donnée dans le corollaire 4.2. Cette formule dit que les dimensions graduées des espaces d'homomorphismes sont données par le coefficient en 1 d'un produit du type $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})$.

Dans les sous-sections 4.1–4.3 nous définissons un morphisme entre certains éléments de **B** associé à une relation de tresses. Dans les sous-sections 4.4 et 4.5 nous construisons par récurrence la BFL, en imitant au niveau des morphismes de la catégorie **B** la récurrence qui apparaît pour le calcul du produit $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n})$ à partir du produit $(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_{n-1}})$.

Dans la section 5, nous prouvons le théorème fondamental de cet article : la BFL est en fait, comme le laisse prévoir son nom, une base de l'espace d'homomorphismes, comme module à droite sur un certain anneau. Dans la section 6 nous en déduisons des bases pour les morphismes dans **B**.

Soit $\mathcal{O}_0$ le bloc principal de la catégorie $\mathcal{O}$ de **BGG**. Comme corollaire du résultat de la section 6, nous trouvons explicitement, dans la section 7, les morphismes dans la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}_0$ d'objets projectifs ($\mathcal{O}_0$-proj).

La catégorie **B** est construite à partir d'une représentation réflexion fidèle de W. Dans l'article en préparation [12] nous utilisons le théorème 5.1 pour prouver des équivalences entre les conjectures de Soergel associées à différentes représentations de W. En particulier nous montrons que sur $\mathbb{R}$ il suffit de considérer la représentation géométrique.

2. Conjecture de Soergel

2.1. Théorème de Soergel

Le théorème de Soergel affirme que la catégorie de Soergel est une catégorification de l'algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter. Donnons quelques définitions avant de donner l'énoncé précis de ce théorème.

Définition 2.1. Un système de Coxeter est un couple $(W, \mathcal{S})$ où W est un groupe et $\mathcal{S} \subseteq W$ une partie génératrice, tels que W admet une présentation de générateurs $s \in \mathcal{S}$ et relations $(sr)^{m(s,r)} = 1$ pour $s, r \in \mathcal{S}$, avec $m(s,s) = 1$, $m(s,r) \geqslant 2$ et éventuellement $m(r,s) = \infty$ si $s \neq r$.

Définition 2.2. Soit $(W, \mathcal{S})$ un système de Coxeter. On définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, \mathcal{S})$ comme la $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre de générateurs $\{T_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, ceux-ci satisfaisant les relations

$$T_s^2 = v^{-2} + \left(v^{-2} - 1\right) T_s$$

pour tout $s \in \mathcal{S}$ et

$$\underbrace{T_s T_r T_s \cdots}_{m(s,r) \text{ termes}} = \underbrace{T_r T_s T_r \cdots}_{m(s,r) \text{ termes}}$$

si $s, r \in \mathcal{S}$ et sr est d'ordre $m(s,r)$.

Si $x = s_1 s_2 \cdots s_n$ est une expression réduite de x, on définit $T_x = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_n}$ (T_x ne dépend pas du choix de la décomposition réduite). On pose $q = v^{-2}$.

Soit $\mathcal{T} \subseteq W$ le sous-ensemble des « réflexions », c'est à dire, tous les éléments qui sont conjugués aux éléments de $\mathcal{S}$.

Définition 2.3. Une représentation de dimension finie de W (sur un corps k de caractéristique $\mathrm{car}(k)$ différente de 2) est appelée réflexion fidèle (RF) si elle est fidèle et si les éléments de W qui ont un espace de points fixes de codimension un forment exactement l'ensemble de réflexions.

Remarque 2.4. Dans [16] Soergel montre que si $k = \mathbb{R}$, pour tout W il existe au moins une RF.

Soit V une RF. Soit $R = S(V^*) = R(V)$ l'algèbre symétrique de V^*, c'est à dire l'algèbre des fonctions régulieres sur V, sur laquelle W agit par fonctorialité.

Définition 2.5. Pour toute petite catégorie additive $\mathcal{A}$, on définit le groupe de Grothendieck scindé $\langle \mathcal{A} \rangle$. C'est le groupe libre sur les objets de $\mathcal{A}$ modulo les relations $M = M' + M''$ chaque fois que $M \cong M' \oplus M''$. Chaque objet $A \in \mathcal{A}$ définit un élément $\langle A \rangle \in \langle \mathcal{A} \rangle$.

L'algèbre R est gradué de la manière suivante : $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ avec $R_2 = V^*$ et $R_i = 0$ pour i impair. Soit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_V$ la catégorie des R-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués qui sont de type fini à gauche et à droite. Le groupe $\langle \mathfrak{R} \rangle$ est un anneau pour $\otimes_R$.

Définition 2.6. Pour chaque objet gradué $M = \bigoplus_i M_i$, et chaque entier n, on définit l'objet décalé $M(n)$ par $(M(n))_i = M_{i+n}$.

On note R^s le sous-anneau de R des invariants pour l'action de $s \in W$. Ces définitions permettent de formuler le théorème fondamental de Soergel ([14], thm. 1.10) :

Théorème 2.7 *(Soergel). Il existe un et seulement un morphisme d'anneaux $\varepsilon : \mathcal{H} \to \langle \mathfrak{R} \rangle$ tel que $\varepsilon(v) = \langle R(1) \rangle$ et $\varepsilon(T_s + 1) = \langle R \otimes_{R^s} R \rangle$, pour tout $s \in \mathcal{S}$.*

Définition 2.8. La catégorie **B** des bimodules de Soergel est la sous catégorie de $\mathfrak{R}$ dont les objets sont les $B \in \mathfrak{R}$ avec $\langle B \rangle$ dans l'image de ε.

C'est cette catégorie **B** qu'on étudie dans l'article.

2.2. *Conjecture de positivité de Kazhdan–Lusztig*

La conjecture de positivité de Kazhdan–Lusztig prévoit que les coefficients des polynômes de Kazhdan–Lusztig sont positifs. Kazhdan et Lusztig l'ont démontrée pour W un groupe de Weyl fini ou affine dans [9]. Haddad [7] a montré cette conjecture pour d'autres groupes de Coxeter finis et Dyer [4] pour les groupes de Coxeter universels.

2.3. *Conjecture de Soergel*

Conjecture 2.9 *(Soergel). Pour tout $x \in W$, il existe un R-bimodule indécomposable $\mathbb{Z}$-gradué $B_x \in \mathfrak{R}$ tel que $\varepsilon(C'_x) = \langle B_x \rangle$, où C'_x est l'élément de la base de Kazhdan–Lusztig associé à x.*

Remarque 2.10. Dans [16], Soergel montre que cette conjecture implique la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan–Lusztig en construisant un inverse à gauche de ε. Cette construction est rappelée ci-dessous.

Remarque 2.11. Dans le cas où $k = \mathbb{C}$ et W est un groupe de Weyl fini, la conjecture de Soergel est montrée dans l'article [14]. Dans [5] Fiebig montre cette conjecture pour W un groupe de Coxeter Universel. Dans [15] Soergel montre que si la caractéristique de k est plus grande que le nombre de Coxeter de W et si W est un groupe de Weyl fini, alors la conjecture de Soergel est équivalente à une partie d'une conjecture de Lusztig portant sur les caractères des représentations irréductibles de groupes algébriques sur k (par exemple $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$).

3. Homomorphismes dans B

3.1. Nous avons déjà exposé nos motivations pour étudier la catégorie **B**. Maintenant posons le problème qui nous intéresse.

Pour chaque $s \in \mathcal{S}$ on note $\theta_s = R \otimes_{R^s} R$. On va fixer par la suite une équation $x_s \in V^*$ de l'hyperplan des points fixes par s (x_s est bien défini à scalaire près). Dans cet article Hom va être l'espace de morphismes de R-bimodules :

$$\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}_{R \otimes R}(M, N).$$

On a que $\mathrm{Hom}(M, N)$ est un (R, R)-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué. L'action de R à gauche et à droite de $\mathrm{Hom}(M, N)$ vient de l'action à gauche et à droite sur M, ou de manière équivalente, sur N. En formules, $(rf)(m) = f(rm) = r(f(m))$, $(fr)(m) = f(mr) = f(m)r$, pour tout $r \in R$, $m \in M$, $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$. Si les bimodules M, N sont gradués, alors Hom va avoir en plus une structure de R-bimodule gradué, avec

$$\mathrm{Hom}\big(M(\lambda), N(\lambda')\big) = \mathrm{Hom}(M, N)(\lambda' - \lambda).$$

Problem 3.1. Décrire explicitement $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$ pour $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{S}$.

Soit **C** la sous-catégorie pleine de **B**, dont les objets sont des sommes directes finies d'objets de la forme $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}(d)$, pour un $d \in \mathbb{Z}$. Alors si on résoud le problème 3.1, on trouve les espaces de morphismes dans la catégorie **C**. Le lemme suivant montre que **B** est l'enveloppe Karoubienne de **C**.

Lemme 3.2. *Un bimodule gradué $B \in \mathfrak{R}$ appartient à* **B** *si et seulement s'il existe $C, D \in$* **C** *tels que*

$$B \oplus C \cong D.$$

Démonstration. Soit $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ une suite finie quelconque de réflexions simples, $b(\bar{s}) = (T_{s_1} + 1) \cdots (T_{s_m} + 1)$ un élément dans l'algèbre de Hecke, et on définit le bimodule

$$\theta_{\bar{s}} = R \otimes_{R^{s_1}} R \otimes_{R^{s_2}} R \otimes \cdots \otimes R \otimes_{R^{s_m}} R.$$

Comme $\langle \theta_{\bar{s}}[n] \rangle = \varepsilon(v^n b(\bar{s}))$, alors $\theta_{\bar{s}}[n] \in \mathbf{B}$. Ceci montre que notre critère est suffisant. Comme les $v^n b(\bar{s})$ engendrent $\mathcal{H}$ comme groupe abélien, il est nécessaire. $\square$

Avec le lemme suivant, le problème 3.1 se réduit à trouver $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$.

Lemme 3.3. *Pour $M, N \in$* **B***, le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : \mathrm{Hom}(\theta_s M, N) &\to \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2), \\ f &\mapsto \big(m \mapsto x_s \otimes f(1 \otimes m) + 1 \otimes f(1 \otimes x_s m)\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de R-modules à droite gradués.

Démonstration. Si $g \in \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2)$, on peut écrire de manière unique $g(m) = 1 \otimes g_1(m) + x_s \otimes g_2(m)$, avec $g_1(m), g_2(m) \in N$. Ceci définit les morphismes g_1 et g_2 associés à g. Soit $\mathfrak{G} : \mathrm{Hom}(M, \theta_s N)(2) \to \mathrm{Hom}(\theta_s M, N)$ le morphisme qui envoie g vers le morphisme $\lambda \otimes m \mapsto \lambda g_2(m)$, avec $\lambda \in R$ et $m \in M$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont bien définis et inverses l'un de l'autre.

On a $g(x_s m) = x_s g(m)$, c'est à dire,

$$1 \otimes g_1(x_s m) + x_s \otimes g_2(x_s m) = x_s \otimes g_1(m) + 1 \otimes (x_s)^2 g_2(m).$$

Par unicité de la décomposition, cette formule permet de conclure que $g_2(x_s m) = g_1(m)$. Avec cette formule on montre directement que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont inverses l'un de l'autre.

En outre, on a $g(r^s m) = r^s g(m)$ pour $r^s \in R^s$. Ceci revient à

$$\begin{aligned} 1 \otimes g_1\big(r^s m\big) + x_s \otimes g_2\big(r^s m\big) &= r^s \otimes g_1(m) + r^s x_s \otimes g_2(m) \\ &= 1 \otimes r^s g_1(m) + x_s \otimes r^s g_2(m). \end{aligned}$$

Ceci implique que $g_2(r^s m) = r^s g_2(m)$, et avec ceci on peut voir que $\mathfrak{G}(g)$ est bien défini. C'est direct de voir que c'est un morphisme de bimodules. Voir que $\mathfrak{F}(f)(m \cdot r) = (\mathfrak{F}(f)(m)) \cdot r$ pour $r \in R$ est aussi direct. On veut alors $\mathfrak{F}(f)(r \cdot m) = r \cdot (\mathfrak{F}(f)(m))$. Pour $r \in R^s$ c'est facile, donc, avec notre décomposition $R = R^s \oplus x_s R^s$ il reste à le montrer pour $r = x_s$. Mais ceci découle directement du fait que $(x_s)^2 \in R^s$. □

3.2. Notation

Étant donné un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $V = \bigoplus_i V_i$, avec $\dim(V) < \infty$, on définit sa dimension gradué par

$$\underline{\dim} V = \sum (\dim V_i) v^{-i} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

Soit R^+ l'idéal de R engendré par les éléments homogènes de degré différent de zéro. On définit le rang gradué d'un R-module à droite $\mathbb{Z}$-gradué de type fini M par

$$\underline{\mathrm{rk}}\, M = \underline{\dim}\big(M/MR^+\big) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

On a alors $\underline{\dim}(V(1)) = v(\underline{\dim} V)$ et $\underline{\mathrm{rk}}(M(1)) = v(\underline{\mathrm{rk}}\, M)$. On définit $\overline{\underline{\mathrm{rk}}}\, M$ comme l'image de $\underline{\mathrm{rk}}\, M$ par $v \mapsto v^{-1}$.

Pour $x \in W$, on définit le (R, R)-bimodule R_x comme R avec l'action à droite tordue par x (en formules : $r \cdot r' = rx(r')$ pour $r \in R_x$ et $r' \in R$), et l'action habituelle de R à gauche.

On rappelle deux résultats de Soergel. Le premier est le théorème 5.3 de [16], et le deuxième est une partie du théorème 5.15 du même article :

Théorème 3.4 *(Soergel). Le morphisme $\varepsilon : \mathcal{H} \to \langle \mathfrak{R} \rangle$ admet un inverse à gauche $\eta : \langle \mathfrak{R} \rangle \to \mathcal{H}$ donné par*

$$\langle B \rangle \to \sum_{x \in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\, \mathrm{Hom}(B, R_x) T_x.$$

Proposition 3.5 *(Soergel). Si $M, N \in \mathbf{B}$, alors* $\mathrm{Hom}(M, N)$ *est libre comme R-module à droite gradué.*

4. Construction de la base des feuilles légères

4.1. Pour $x \in W$, on définit $\mathcal{R}(x)$ comme l'ensemble de toutes les expressions réduites de x (si $l(x) = n$ cet ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathcal{S}$). Si 1 est l'élément unité de W, on pose $\theta_1 = R$ et si $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{R}(x)$, on pose $\theta_{\bar{t}} = \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$.

Nous donnons une définition.

Définition 4.1. Soit $\tau : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ l'application définie par

$$\tau\left(\sum_{x \in W} p_x T_x\right) = p_1 \quad \big(p_x \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\big).$$

Maintenant on peut énoncer un corollaire du théorème 3.4.

Corollaire 4.2. *Soit* $(s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{S}^n$. *On définit les entiers* n_i *par* $\tau((1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n})) = \sum_i n_i q^i$. *Alors, il existe un isomorphisme de* R*-modules à droite gradués*

$$\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R) \cong \bigoplus_i n_i R(2i).$$

Démonstration. Par la proposition 3.5, il existe des entiers n'_i tels que $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R) \cong (\bigoplus_i n'_i R(2i))$ comme R-modules à droite, et par le théorème 3.4, on a les équations

$$\begin{aligned}
\tau\big((1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n})\big) &= \tau \circ \eta \circ \varepsilon\big((1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_n})\big)\\
&= \tau \circ \eta\big(\langle\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}\rangle\big)\\
&= \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\,\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, R)\\
&= \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\left(\bigoplus_i n'_i R(2i)\right)\\
&= \sum n'_i v^{-2i}\,\overline{\underline{\mathrm{rk}}}\,R\\
&= \sum n'_i q^i.
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $n'_i = n_i$. □

Proposition 4.3. *Soient* $s, r \in \mathcal{S}$, $s \neq r$ *avec* $m(s,r) < \infty$. *La composante de degré zéro de*

$$\mathrm{Hom}(\underbrace{\theta_s\theta_r\theta_s\cdots}_{m(s,r)\ \text{termes}}, \underbrace{\theta_r\theta_s\theta_r\cdots}_{m(s,r)\ \text{termes}})$$

est un espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, donnons d'abord une définition :

Définition 4.4. On pose $G := \{q^m + \sum_{i<m} a_i q^i$ pour certains $a_i \in \mathbb{Z}\}$ où $m = m(s,r)$.

Par le lemme 3.3 et le corollaire 4.2, montrer la proposition 4.3 est équivalent à montrer que

$$\tau\big(\underbrace{(1+T_s)(1+T_r)(1+T_s)\cdots(1+T_r)}_{2m}\big) \in G_m. \tag{4.1}$$

Pour un entier $k > 0$, définissons $Z_{2k} = \underbrace{T_r T_s T_r \cdots}_{k\ \text{termes}}$, $Z_{2k-1} = \underbrace{T_s T_r T_s \cdots}_{k\ \text{termes}}$ et soit $Z_0 = 1$. Dans le lemme suivant $\deg(p)$ est le degré du polynôme p, et $[-]$ est la fonction partie entière.

Lemme 4.5. *Dans l'algèbre de Hecke on a pour tout entier* n *l'égalité suivante* :

$$\underbrace{(1+T_s)(1+T_r)(1+T_s)\cdots}_{2n\ \text{termes}} = \sum_{j=0}^{4n-1} p_{j,n} Z_j$$

avec $\deg(p_{j,n}) < n - [j/4]$ *et* $p_{4n-1,n} = 1$.

Démonstration. Prouvons-le par récurrence sur n. Pour $n = 1$ est clair. Supposons le lemme vrai pour $n = k$. Les trois équations suivantes découlent des définitions :

$$\begin{aligned} T_s Z_{2k-1} &= (q-1)Z_{2k-1} + qZ_{2k-2}, \\ T_r Z_{2k} &= (q-1)Z_{2k} + qZ_{2k-3}, \\ T_s T_r Z_{2k} &= (q-1)Z_{2k+1} + q(q-1)Z_{2k-3} + q^2 Z_{2k-4}. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_s Z_j &= (q-1)Z_j + qZ_{j-1} \quad \text{si } j \text{ est impair}, \\ T_r Z_j &= (q-1)Z_j + qZ_{j-3} \quad \text{si } j \text{ est pair}, \\ T_s T_r Z_j &= (q-1)Z_{j+1} + q(q-1)Z_{j-3} + q^2 Z_{j-4} \quad \text{si } j \text{ est pair}. \end{aligned}$$

Si on utilise ces équations dans le développement du terme à droite de l'égalité suivante

$$\underbrace{(1+T_s)(1+T_r)(1+T_s)\cdots}_{2(k+1)\text{ termes}} = (1 + T_s + T_r + T_s T_r)\sum_{j=0}^{4k-1} p_{j,k} Z_j \tag{4.2}$$

on arrive pour tout j à exprimer explicitement $p_{j,k+1}$ en fonction de l'ensemble $\{p_{j,k}\}_j$ et de q. Les inégalités de l'énoncé découlent des mêmes inégalités pour les $p_{j,n}$, de manière routinière, et la deuxième assertion découle du fait que $p_{4(k+1)-1,k+1} = p_{4k-1,k}$. $\square$

Preuve de la proposition 4.3. On a (cf. [6, proposition 8.1.1])

$$\tau(T_x T_{y^{-1}}) = \begin{cases} q^{l(x)} & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases} \tag{4.3}$$

Ceci implique que

$$\tau(Z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < j < 4m-1, \\ q^m & \text{si } j = 4m-1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Donc si on applique τ aux deux côtés de l'égalité du lemme 4.5, étant donné par ce lemme que $\deg(p_{0,n}) < n$ on obtient bien (4.1). $\square$

Pour chaque couple (s, r) comme dans la proposition 4.3, on choisit un élément non nul $f_{s,r}$ de

$$\mathrm{Hom}(\underbrace{\theta_s\theta_r\theta_s\cdots}_{m(s,r)\text{ termes}}, \underbrace{\theta_r\theta_s\theta_r\cdots}_{m(s,r)\text{ termes}}).$$

Par le corollaire précédent, il est bien défini à scalaire près. Dans la sous-section 4.3, on va éliminer cette incertitude, c'est à dire pour chaque s et r on va avoir un morphisme $f_{s,r}$ bien défini.

4.2. On sait que pour $s \in \mathcal{S}$ on a $R \cong R^s \oplus x_s R^s$ comme R^s-module à gauche. Ceci nous dit que θ_s admet $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x_s\}$ comme base en tant que R-module à gauche. Et plus encore, si, pour $s \in \mathcal{S}$, on définit $x_s^0 = 1$ et $x_s^1 = x_s$, alors par récurrence on voit que si $(t_1, \dots, t_r)$ est un r-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$, alors $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$ admet

$$\left\{1 \otimes x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r}\right\}_{(i_1,\dots,i_r)\in\{0,1\}^r}$$

comme base en tant que R-module à gauche.

Définition 4.6. On appelle cette base la « base normale » de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$. On définit $1 \otimes x_{t_1} \otimes x_{t_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_r}$ (resp. 1) comme « l'élément normal » de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$ (resp. R). Si $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$, on va appeler « partie normale de x » le coefficient de l'élément normal dans la décomposition de x dans la base normale.

4.3.

Lemme 4.7. *Soient $s \neq r \in \mathcal{S}$ avec $m(s,r) \neq \infty$. On pose $m = m(s,r)$ et*

$$X := \underbrace{\theta_s\theta_r\theta_s\cdots}_{m \text{ termes}} \quad et \quad X' := \underbrace{\theta_r\theta_s\theta_r\cdots}_{m \text{ termes}}.$$

Soit x l'élément normal de X. Il existe un unique morphisme $f_{s,r} \in \operatorname{Hom}(X, X')$ telle que la partie normale de $f_{s,r}(x)$ soit égale à 1.

Démonstration. Dans [16], Soergel montre que si les B_x existent (voir conjecture 1.14), ils sont uniques à isomorphisme près, et il montre cette conjecture pour un groupe diédral fini. Soit W' le sous-groupe de W engendré par r et s. Soit w_0 le plus long élément de W' dans l'ordre de Bruhat. Dans [14] Soergel montre que $B_{w_0} = R \otimes_{R^{W'}} R$. Par [8, ch. IV, cor. 1.11 a.] on a :

$$R \cong \bigoplus_{w\in W} R^{W'}\bigl(-2l(w)\bigr) \quad \text{comme } R^{W'}\text{-mod gradué à gauche}$$

et ceci implique

$$B_{w_0} \cong \bigoplus_{w\in W} R\bigl(-2l(w)\bigr) \quad \text{comme } R\text{-mod gradué à gauche.}$$

Si M est un R-module, on note $\overline{M} = M/R^+M$. La dernière ligne montre que

$$\overline{B_{w_0}} \cong \bigoplus_{w\in W} k\bigl(-2l(w)\bigr) \quad \text{comme } k\text{-ev gradué.}$$

En particulier, $\overline{B_{w_0}}$ est de dimension 1 comme espace vectoriel en degré $2m$:

$$(\overline{B_{w_0}})_{2m} \cong k. \tag{4.5}$$

On voit en outre que

$$\left\{\overline{1 \otimes x_s^{i_1} \otimes x_r^{i_2} \otimes x_s^{i_3} \otimes \cdots}\right\}_{(i_1,\dots,i_m)\in\{0,1\}^m}$$

est une base de $\overline{X}$ comme k-espace vectoriel gradué (voir définition 4.6). En particulier on a

$$(\overline{X})_{2m} \cong k \tag{4.6}$$

parce que l'élément normal de X est le seul de la base normale dont le degré est $2m$. Dans [16, prop. 6.16], Soergel montre l'existence d'isomorphismes de (R, R)-bimodules gradués :

$$\mu : X \xrightarrow{\sim} B_{w_0} \oplus M \tag{4.7}$$

et

$$\nu : X' \xrightarrow{\sim} B_{w_0} \oplus M' \tag{4.8}$$

pour certains bimodules M, M'. En passant au quotient on obtient un isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués

$$\overline{\mu} : \overline{X} \xrightarrow{\sim} \overline{B_{w_0}} \oplus \overline{M}. \tag{4.9}$$

Rappelons que x est l'élément normal de X. Soit sa décomposition $\mu(x) = x_1 + x_2$ comme dans (4.7). Par (4.5), (4.6) et (4.9), on voit que $\overline{\mu}(\overline{x}) = \overline{\mu(x)} \in \overline{B_{w_0}}$. Ceci dit que $x_2 \in R^+M \subset R^+(B_{w_0} \oplus M)$. Comme $x \notin R^+X$, alors $\mu(x) \notin R^+(B_{w_0} \oplus M)$, parce que μ est un isomorphisme de R-modules. Donc on a

$$x_1 = \mu(x) - x_2 \notin R^+(B_{w_0} \oplus M). \tag{4.10}$$

En utilisant les identifications (4.7) et (4.8), on définit $\mathcal{K} \in \mathrm{Hom}(X, X')$, identité sur B_{w_0} et zéro sur M. Par la proposition 4.3, $\mathcal{K}$ est l'unique morphisme de degré zéro, à scalaire près, de $\mathrm{Hom}(X, X')$.

On va montrer maintenant que la partie normale de $\mathcal{K}(x)$ est non nulle. Supposons qu'elle soit nulle. Comme $\mathcal{K}$ est un morphisme gradué de degré zéro, $\mathcal{K}(x)$ est de degré $2m$ et comme tous les éléments de la base normale sauf l'élément normal sont de degré inférieur à $2m$, on a $\mathcal{K}(x) \in R^+X'$. Mais d'autre part, $\mathcal{K}(x) = \nu^{-1}(x_1)$. Comme ν^{-1} est un isomorphisme de R-modules, (4.10) nous dit que $\nu^{-1}(x_1) \notin R^+X'$, ce qui nous donne une contradiction.

Finalement, comme la partie normale de $\mathcal{K}(x)$ est non nulle, on choisit $f_{s,r}$ comme le multiple de $\mathcal{K}$ tel que la partie normale de $f_{s,r}(x)$ soit 1. □

4.4. Pour chaque $s \in \mathcal{S}$ on va définir six morphismes. Considérons la décomposition $R = R^s \oplus x_s R^s$. Soient $p_1, p_2 \in R^s$ et $p, q, r \in R$. On définit des morphismes de (R, R)-bimodules gradués :

$$\begin{aligned}
&qP_s : R \to R, && p_1 + x_s p_2 \mapsto p_1,\\
&I_s : R \to R, && p_1 + x_s p_2 \mapsto x_s p_2,\\
&I'_s : R(2) \to R, && p_1 + x_s p_2 \mapsto p_2,\\
&m^s : \theta_s \to R, && R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \mapsto pq,\\
&i_0^s : \theta_s\theta_s(2) \to R, && R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \otimes r \mapsto pI'_s(q)r,\\
&i_1^s : \theta_s\theta_s(2) \to \theta_s, && R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R \ni p \otimes q \otimes r \mapsto pI'_s(q) \otimes r \in R \otimes_{R^s} R.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces morphismes sont bien définis, parce que $I'_s(r^s p) = r^s I'_s(p)$ pour $r^s \in R^s$.

4.5. On va fixer jusqu'à la fin de la section 5 une suite $(s_1, s_2, \ldots)$ d'éléments de $\mathcal{S}$. On définit $\overline{s_0} = 1$ et $\overline{s_n} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, pour $n \geqslant 1$. On sait que si $x \in W$, $s \in \mathcal{S}$ et $l(xs) < l(x)$, alors il existe une expression réduite de x ayant s comme dernier élément. Dans [2, ch. 4, §1, prop. 4], on montre qu'on peut passer d'une expression réduite d'un élément à n'importe quelle autre par une suite de mouvements de tresse. Donc pour chaque couple $(n, \bar{t})$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ une expression réduite de $x := t_1 \cdots t_k \in W$ et avec $l(xs_n) < l(x)$, l'ensemble de suites d'éléments de $\mathcal{R}(x)$

$$\big(\big(t_1^1, \ldots, t_k^1\big), \big(t_1^2, \ldots, t_k^2\big), \ldots, \big(t_1^l, \ldots, t_k^l\big)\big)$$

où $t_i^1 = t_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, $t_k^l = s_n$, et où on passe de $(t_1^i, \ldots, t_k^i)$ vers $(t_1^{i+1}, \ldots, t_k^{i+1})$ par un mouvement de tresses, est non vide.

Alors on choisit arbitrairement et jusqu'à la fin de la section 5, pour chaque couple $(n, \bar{t})$ un élément de cet ensemble, qu'on appellera $P(n, \bar{t})$.

Soit $P(n, \bar{t}) = ((t_1^1, \ldots, t_k^1), (t_1^2, \ldots, t_k^2), \ldots, (t_1^l, \ldots, t_k^l))$. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant l-1$ on a un morphisme π_i associé au mouvement de tresses dans $\mathrm{Hom}(\theta_{t_1^i} \cdots \theta_{t_k^i}, \theta_{t_1^{i+1}} \cdots \theta_{t_k^{i+1}})$, du type $\mathrm{Id}^p \otimes f_{s,r} \otimes \mathrm{Id}^{k-p-m(s,r)}$ pour un certain $0 \leqslant p \leqslant k - m(s,r)$. On définit $F_n(\bar{t}) = \pi_{l-1} \circ \cdots \circ \pi_2 \circ \pi_1 \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}, \theta_{t_1^l} \cdots \theta_{t_{k-1}^l}\theta_{s_n})$.

4.6. On va définir par récurrence sur $n \geqslant 0$ un sous ensemble A_n de

$$\mathfrak{F}_\mathfrak{n} := \coprod_{x \in W} \coprod_{\bar{t} \in \mathcal{R}(x)} \mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\bar{t}})$$

où $\coprod$ est l'union disjointe.

On pose tout d'abord $A_0 = \{\mathrm{Id} : R \to R\}$. On va construire maintenant A_n à partir de A_{n-1}. On pose

$$A_{n-1}^0 = A_{n-1} \cap \left(\coprod_{x\in W} \coprod_{\substack{\bar{t}\in\mathcal{R}(x)\\ l(xs_n)>l(x)}} \mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\bar{t}}) \right)$$

et $A_{n-1}^1 = A_{n-1} - A_{n-1}^0$.

On va définir quatre morphismes, $f_{i,n}^j : A_{n-1}^j \to \mathfrak{F}_\mathfrak{n}$ avec $i, j \in \{0, 1\}$.

Pour les deux premiers morphismes, soient $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{n-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}) \in A_{n-1}^0$ et $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$. On pose

$$f_{0,n}^0(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}\theta_{s_n} \xrightarrow{\mathrm{Id}^k\otimes m^{s_n}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k},$$

$$f_{1,n}^0(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}\theta_{s_n}.$$

Pour les deux derniers, soit $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{n-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}) \in A_{n-1}^1$ et soit $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$. On a $F_n(\bar{t}) \in \mathrm{Hom}(\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}, \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}\theta_{s_n})$. On pose

$$f_{0,n}^1(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}\theta_{s_n} \xrightarrow{F_n(\bar{t})\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}\theta_{s_n}\theta_{s_n} \xrightarrow{\mathrm{Id}^{k-1}\otimes i_0^s} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}},$$

$$f_{1,n}^1(a) : \theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n} \xrightarrow{a\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}\theta_{s_n} \xrightarrow{F_n(\bar{t})\otimes \mathrm{Id}} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}\theta_{s_n}\theta_{s_n} \xrightarrow{\mathrm{Id}^{k-1}\otimes i_1^s} \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}\theta_{s_n}.$$

Maintenant on peut définir A_n

$$A_n = \bigcup_{0\leqslant i,j\leqslant 1} f_{i,n}^j\big(A_{n-1}^j\big).$$

On définit A'_n comme le sous ensemble de A_n des éléments appartenant à $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$.

5. Le théorème et sa preuve

Théorème 5.1. *L'ensemble A'_n est une R-base de* $\mathrm{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$.

Remarque 5.2. On va appeler A'_n une « *base de feuilles légères* » : En tensorisant par l'identité on peut voir $A_k \subset \mathfrak{F}_\mathfrak{n}$ pour $k \leqslant n$. Alors on peut voir A_n comme un arbre binaire parfait, dont on peut associer à chaque feuille (une feuille est un morphisme de $\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}$ vers $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$) un nombre ou « poids » (dans ce cas le poids serait k). Avec ce point de vue, A'_n est l'ensemble de feuilles qui ont poids zéro.

Remarque 5.3. Il faut noter que chaque morphisme de A'_n dépend du choix des $P(n, \bar{t})$. On va donner un exemple dans lequel différents choix du $P(n, \bar{t})$ donnent des morphismes associés différents.

Soient $s, r \in \mathcal{S}$ avec $m(s, r) = 3$. Soient

$$f = \big(m^s \circ i_1^s\big) \circ \big(\mathrm{Id} \otimes m^r \circ i_1^r \otimes \mathrm{Id}\big) \circ \big(\mathrm{Id}^2 \otimes m^s \circ i_1^s \otimes \mathrm{Id}^2\big)$$

et

$$g = f \circ \left(f_{r,s} \otimes \mathrm{Id}^3\right) \circ \left(f_{s,r} \otimes \mathrm{Id}^3\right)$$

deux morphismes appartenant à $\mathrm{Hom}(\theta_s\theta_r\theta_s\theta_s\theta_r\theta_s, R)$. On va montrer que $f \neq g$. Pour ceci on définit

$$\bar{x} = 1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes x_s \otimes 1 \otimes x_s \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes x_s \otimes 1 \otimes x_s \otimes 1 \in \theta_s\theta_r\theta_s\theta_s\theta_r\theta_s.$$

On voit facilement que $f(\bar{x}) = 1$. Il nous reste a montrer que $g(\bar{x}) = 0$. Pour ceci il suffit de montrer que

$$f_{s,r}(1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1) = 0. \tag{5.1}$$

Comme $C'_s C'_r C'_s = C'_{srs} + C'_s$, le théorème 4.2 de [16] et le lemme 2 de [14] impliquent que $\theta_s\theta_r\theta_s(3) \simeq R \otimes_{R^{\langle s,r\rangle}} R(3) \oplus \theta_s(1)$, c'est-à-dire,

$$\theta_s\theta_r\theta_s \simeq R \otimes_{R^{\langle s,r\rangle}} R \oplus \theta_s(-2). \tag{5.2}$$

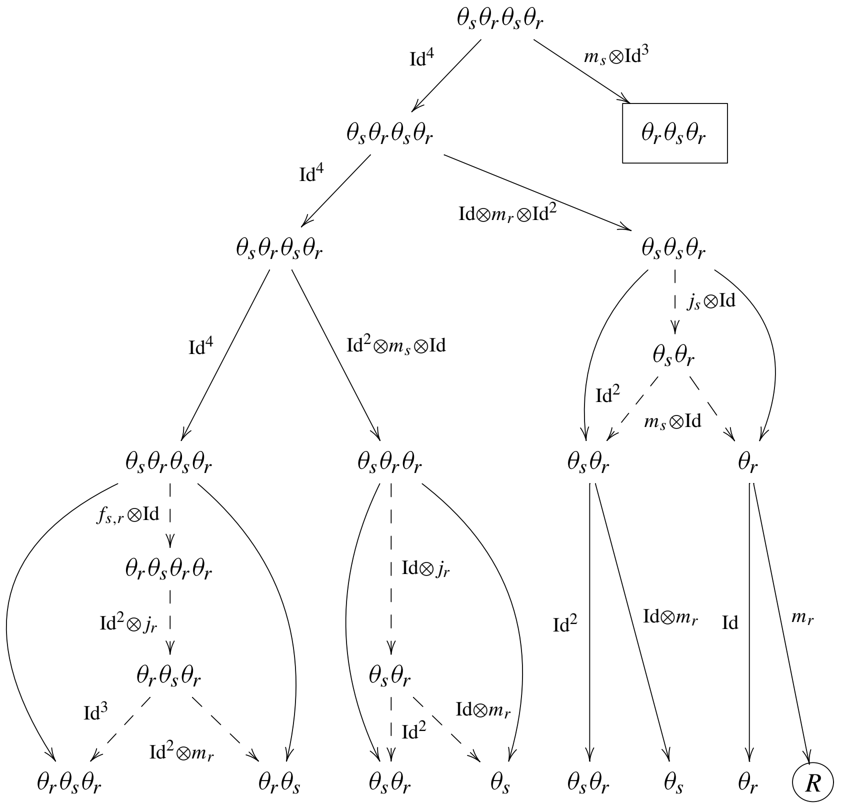
Il est facile de voir que, à scalaire près, le seul morphisme de degré zéro de $R \otimes_{R^{\langle s,r\rangle}} R$ vers $\theta_s\theta_r\theta_s$ est le morphisme $i_{s,r}$ défini par $(1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)$. Par le corollaire 4.2 on voit qu'à scalaire près il y a un seul morphisme de degré zéro de $\theta_s(-2)$ vers $\theta_s\theta_r\theta_s$. Ce morphisme est le morphisme $(1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes x_r \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x_r \otimes 1)$. Donc on a (toujours à scalaire près) explicité l'isomorphisme (5.2).

Comme on a vu dans le lemme de la section 4.3, $R \otimes_{R^{\langle s,r\rangle}} R \simeq B_{srs}$, donc on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \theta_s\theta_r\theta_s \arrow[r] \arrow[dr, "f_{s,r}"'] & R \otimes_{R^{\langle s,r\rangle}} R \arrow[d, "i_{r,s}"] \\ & \theta_r\theta_s\theta_r \end{tikzcd}$$

la flèche horizontale étant la surjection canonique en (5.2). Ceci permet de prouver (5.1), et donc de conclure que $f \neq g$.

Example. Dans l'exemple suivant nous avons $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (s, r, s, r)$ et $m(s, r) = 3$. Par des raisons d'espace nous montrons seulement une moitié de l'arbre, la « moitié gauche », c'est à dire, nous ne montrons pas les morphismes qui passent par l'élément encadré $\theta_r\theta_s\theta_r$. Nous avons encerclé en bas à droite la seule feuille légère de cette moitié d'arbre.



Démonstration. Définissons les polynômes p_n^x par

$$(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_n}) = \sum_{x \in W} p_n^x T_x.$$

On a les équations suivantes

$$(1 + T_{s_1}) \cdots (1 + T_{s_{n-1}})(1 + T_{s_n}) = \left(\sum p_{n-1}^x T_x\right) + \left(\sum_{l(xs_n) > l(x)} p_{n-1}^x T_{xs_n}\right) + \left(\sum_{l(xs_n) < l(x)} p_{n-1}^x T_x T_{s_n}\right)$$

et

$$\sum_{l(xs_n) < l(x)} p_{n-1}^x T_x T_{s_n} = \left(\sum_{l(xs_n) < l(x)} q p_{n-1}^x T_{xs_n}\right) + \left(\sum_{l(xs_n) < l(x)} p_{n-1}^x \underbrace{T_{xs_n} T_{s_n}}_{T_x} (q - 1)\right),$$

qui impliquent

$$(1+T_{s_1})\cdots(1+T_{s_{n-1}})(1+T_{s_n}) = \left(\sum_{l(xs_n)>l(x)} p_{n-1}^x T_x + p_{n-1}^x T_{xs_n}\right) + \left(\sum_{l(xs_n)<l(x)} q\left(p_{n-1}^x T_x + p_{n-1}^x T_{xs_n}\right)\right).$$

Cette dernière formule, le corollaire 4.2, et la construction récursive de A'_n vont nous montrer que les degrés gradués des éléments de A'_n sont ceux que devrait avoir une base. Avec les définitions suivantes on va dire ceci d'une manière plus précise.

Définition 5.4. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble d'éléments homogènes d'espaces vectoriels gradués. On définit $\mathbb{Y}(X) = \sum_i q^{\deg(x_i)/2}$.

Définition 5.5. Pour $x \in W$ on définit

$$A_n(x) = A_n \cap \coprod_{\bar{i} \in \mathcal{R}(x)} \operatorname{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, \theta_{\bar{i}}).$$

Lemme 5.6. *On a l'égalité* $\mathbb{Y}(A_n(x)) = p_n^x$. *En particulier,* $\mathbb{Y}(A'_n) = p_n^1$.

Démonstration. On va le montrer par récurrence sur n. Pour $n=1$ c'est clair. Supposons-le vrai pour $n-1$. Par construction, à chaque $a \in (A_{n-1}(x))^0$ on associe les deux éléments $a' \in A_n(x)$ et $a'' \in A_n(xs_n)$, et à chaque $b \in (A_{n-1}(x))^1$ on associe les deux éléments $b' \in A_n(x)$ et $b'' \in A_n(xs_n)$, avec $\deg(a) = \deg(a') = \deg(a'')$, et $\deg(b) + 2 = \deg(b') = \deg(b'')$, ce qui permet de conclure la récurrence. $\square$

Supposons que l'on ait montré que les éléments de A'_n sont linéairement indépendants pour l'action de R. Soit T le sous R-module de $\operatorname{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$ engendré par les éléments de A'_n. Dans chaque degré, T et $\operatorname{Hom}(\theta_{\overline{s_n}}, R)$ sont de dimension finie comme k-espaces vectoriels, et ils ont la même dimension parce que $\mathbb{Y}(A'_n) = p_n^1$ et T est libre pour l'action de R (voir corollaire 4.2), donc ils sont égaux. Cela étant vrai à chaque degré, on déduit que $T = \operatorname{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_n}, R)$, et cela finit la preuve du théorème 5.1.

Donc il nous reste à montrer que les éléments de A'_n sont linéairement indépendants pour l'action de R.

Les éléments de A'_n sont de la forme $f_{i_n,n}^{j_n} \circ \cdots \circ f_{i_2,2}^{j_2} \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{Id})$ avec $i_k, j_k \in \{0,1\}$. Soit $I_n = \{(i_1, \ldots, i_n)$ tel que $\exists (j_1, \ldots, j_n)$ avec $f_{i_n,n}^{j_n} \circ \cdots \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{Id}) \in A'_n\} \subseteq \{0,1\}^n$. On remarque que dans cette dernière définition le n-uplet $(j_1, \ldots, j_n)$ est unique, s'il existe.

On rappelle que $x_s^0 = 1$ et $x_s^1 = x_s$ pour $s \in \mathcal{S}$. Si $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$, on pose $x_{\bar{i}} = 1 \otimes x_{s_1}^{i_1} \otimes x_{s_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_n}^{i_n} \in \theta_{s_1}\theta_{s_2}\cdots\theta_{s_n}$, et si $\bar{i} \in I_n$, on pose $f_{\bar{i}} = f_{i_n,n}^{j_n} \circ \cdots \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{Id})$.

Sur $\{0,1\}^n$, on appelle $\prec$ l'ordre total suivant : Si $\sum_j i_j > \sum_j i'_j$ alors $(i_1, \ldots, i_n) \succ (i'_1, \ldots, i'_n)$. Sinon, soit r le plus petit entier tel que $i_r \neq i'_r$. Si $i_r = 0$, alors $(i_1, \ldots, i_n) \succ (i'_1, \ldots, i'_n)$, et si $i_r = 1$, alors $(i_1, \ldots, i_n) \prec (i'_1, \ldots, i'_n)$.

Pour finir la démonstration du théorème, on veut montrer que si $\sum_{\bar{i} \in I_n} a_{\bar{i}} f_{\bar{i}} = 0$, avec $a_{\bar{i}} \in R$, alors $a_{\bar{i}} = 0$ pour tout $\bar{i} \in I_n$. Pour cela il est suffisant de montrer les deux faits suivants :

(a) $f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}}) = 1$,
(b) $f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}'}) = 0$ pour $\bar{i} \succ \bar{i}'$.

Définition 5.7. On dit qu'un élément $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$ est « supérieur », si $x \in R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$, et il est « normalsup » s'il appartient à $1 \otimes x_{t_1} \otimes x_{t_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_r} + R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$. Pour $f \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$, on note $f\ddagger$ l'ensemble $f + R_+\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$.

Si $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in I_n$, on définit $f_{\bar{i}}^m = f_{i_m,m}^{j_m} \circ \cdots \circ f_{i_2,2}^{j_2} \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{Id})$, et $x_{\bar{i}}^m = 1 \otimes x_{s_1}^{i_1} \otimes x_{s_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{s_m}^{i_m} \in \theta_{s_1}\theta_{s_2} \cdots \theta_{s_m}$, pour $1 \leqslant m \leqslant n$.

Lemme 5.8. *Soient $\bar{i}, \bar{i'} \in I_n$. Si $f_{\bar{i}}^{u-1}(x_{\bar{i'}}^{u-1})$ est supérieur, alors $f_{\bar{i}}^u(x_{\bar{i'}}^u)$ est supérieur aussi.*

Démonstration. On a $f_{\bar{i}}^u(x_{\bar{i'}}^u) = f_{i_u,u}^{j_u}(f_{\bar{i}}^{u-1})(x_{\bar{i'}}^{u-1} \otimes x_{s_u}^{i'_u})$. Par hypothèse

$$\big(f_{\bar{i}}^{u-1} \otimes \mathrm{Id}\big)\big(x_{\bar{i'}}^{u-1} \otimes x_{s_u}^{i'_u}\big)$$

est supérieur, et le fait que $f_{\bar{i}}^u(x_{\bar{i'}}^u)$ est l'image de cet élément par un morphisme de bimodules, permet de conclure le lemme. $\square$

Lemme 5.9. *Le morphisme $F_r(\bar{t})$ envoie toujours un élément normalsup (resp. supérieur) vers un élément normalsup (resp. supérieur).*

Démonstration. Comme $F_r(\bar{t})$ est un morphisme de bimodules, il envoie un élément supérieur vers un élément supérieur.

Maintenant on veut montrer que $F_r(\bar{t})$ envoie un élément normalsup vers un élément normalsup. Il suffit à son tour de montrer ceci pour les morphismes du type $\mathrm{Id}^a \otimes f_{s,r} \otimes \mathrm{Id}^b$, ce qui revient à le montrer pour les $f_{s,r}$, mais ceci est vrai par définition de $f_{s,r}$. $\square$

Lemme 5.10. *Si $f_{\bar{i}}^m \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_m}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r})$, alors $f_{\bar{i}}^m(x_{\bar{i}}^m)$ est un élément normalsup de $\theta_{t_1} \cdots \theta_{t_r}$.*

Démonstration. On va le montrer par récurrence sur m. Pour $m = 1$, on sait que $j_1 = 0$.

Si $i_1 = 0$, alors $f_{0,1}^0(\mathrm{Id})(1 \otimes 1) = 1 \in R$.

Si $i_1 = 1$, alors $f_{1,1}^0(\mathrm{Id})(1 \otimes x_{s_1}) = 1 \otimes x_{s_1} \in \theta_{s_1}$.

Supposons le lemme vrai pour tout $m < r$. Pour simplifier les notations on va appeler $g_j := f_{\bar{i}}^j$. Soit $g_{r-1} \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_{r-1}}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$. On note aussi $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$. Comme $g_r = f_{i_r,r}^{j_r}(g_{r-1})$, il y a quatre cas :

(1) $j_r = 0$, $i_r = 0$ (donc $x_{s_r}^{i_r} = 1$), alors

$$\begin{aligned} g_r(x_{\bar{i}}^r) &= \big(\mathrm{Id}^k \otimes m^{s_r}\big) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{Id})\big(x_{\bar{i}}^r\big) \\ &\in \big(\mathrm{Id}^r \otimes m^{s_r}\big)(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes 1\ddagger) \\ &\in 1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k}\ddagger \subseteq \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}. \end{aligned}$$

(2) $j_r = 0$, $i_r = 1$ (donc $x_{s_r}^{i_r} = x_{s_r}$) alors

$$g_r\big(x_{\bar{i}}^r\big) = (g_{r-1} \otimes \mathrm{Id})\big(x_{\bar{i}}^r\big) \in 1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes x_{t_s} \ddagger \subseteq \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k} \theta_{t_s}.$$

(3) $j_r = 1$, $i_r = 0$ (donc $x_{s_r}^{i_r} = 1$) alors

$$\begin{aligned} g_r\big(x_{\bar{i}}^r\big) &= \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r}\big) \circ \big(F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{Id}\big) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{Id})\big(x_{\bar{i}}^r\big) \\ &\in \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r}\big) \circ \big(F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{Id}\big)(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes 1\ddagger) \\ &\in \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_0^{s_r}\big)(1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r} \otimes 1\ddagger) \\ &\in 1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \ddagger \subseteq \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}}. \end{aligned}$$

(4) $j_r = 1$, $i_r = 1$ (donc $x_{s_r}^{i_r} = x_{s_r}$) alors

$$\begin{aligned} g_r\big(x_{\bar{i}}^r\big) &= \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r}\big) \circ \big(F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{Id}\big) \circ (g_{r-1} \otimes \mathrm{Id})\big(x_{\bar{i}}^r\big) \\ &\in \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r}\big) \circ \big(F_r(\bar{t}) \otimes \mathrm{Id}\big)(1 \otimes x_{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_k} \otimes x_{t_r}\ddagger) \\ &\in \big(\mathrm{Id}^{k-1} \otimes i_1^{s_r}\big)(1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r} \otimes x_{s_r}\ddagger) \\ &\in 1 \otimes x_{t'_1} \otimes \cdots \otimes x_{t'_{k-1}} \otimes x_{s_r} \ddagger \subseteq \theta_{t'_1} \cdots \theta_{t'_{k-1}} \theta_{s_r}. \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne dans (3) et (4) vient du fait que $F_r(\bar{t})$ envoie un élément normalsup vers un élément normalsup (lemme 5.9). □

Maintenant on peut finir la preuve du théorème. La première chose qu'on peut constater est que pour $s \in \mathcal{S}$, le morphisme I'_s est gradué de degré -2. Donc $f_{\bar{i}} = f_{i_n,n}^{j_n} \circ \cdots \circ f_{i_2,2}^{j_2} \circ f_{i_1,1}^{j_1}(\mathrm{Id})$ est un morphisme gradué de degré $\sum_{p=1}^{n} -2j_p$.

Soit

$$X_{a,b} = \{p \mid j_p = a,\ i_p = b\}.$$

Si $a \in \mathrm{Hom}(\theta_{s_1} \cdots \theta_{s_m}, \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k})$, on pose $\varpi(a) = k$. Les quatre équations suivantes sont faciles à vérifier :

$$\begin{aligned} \varpi(a) &= \varpi\big(f_{0,r}^0(a)\big), \\ \varpi(a) &= \varpi\big(f_{1,r}^1(a)\big), \\ \varpi(a) + 1 &= \varpi\big(f_{1,r}^0(a)\big), \\ \varpi(a) - 1 &= \varpi\big(f_{0,r}^1(a)\big). \end{aligned}$$

Si $\bar{i} \in I_n$, alors, comme $\varpi(f_{\bar{i}}) = 0$, on peut déduire que $\mathrm{card}(X_{1,0}) = \mathrm{card}(X_{0,1})$. Donc on a

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} r_p &= \mathrm{card}(X_{1,0}) + \mathrm{card}(X_{1,1}) \\ &= \mathrm{card}(X_{0,1}) + \mathrm{card}(X_{1,1}) \\ &= \sum_{p=1}^{n} i_p.\end{aligned}$$

Donc $f_{\bar{i}}$ est un morphisme gradué de degré $\sum_{p=1}^{n} -2i_p$. On a aussi que si $\overline{i'} = (i'_1, \dots, i'_m)$ le degré de $x_{\overline{i'}}$ est $\sum 2i'_p$. Donc, si $\sum i_p > \sum i'_p$, alors $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) = 0$.

Maintenant supposons $\sum i_p = \sum i'_p$. Par le raisonnement précedent,

$$\deg\big(f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}})\big) = 0, \tag{5.3}$$

c'est à dire, $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}})$ est un scalaire. Ceci et le lemme 5.10 permettent de conclure la partie (a), c'est à dire, que $f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}}) = 1$.

Pour montrer la partie (b), c'est à dire que $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) = 0$ pour $\bar{i} \succ \overline{i'}$, on va supposer $\sum i_p = \sum i'_p$, $\overline{i'} \prec \bar{i}$, et aussi $f_{\bar{i}}(x_{\overline{i'}}) \neq 0$. On va arriver à une contradiction.

Soit r le plus petit entier tel que $i_r \neq i'_r$, donc $i_r = 0$ et $i'_r = 1$. Par le lemme précédent, $f_{\bar{i}}^{r-1}(x_{\overline{i'}}^{r-1})$ est un élément normalsup. Donc si n est l'élément normal de l'ensemble d'arrivée du morphisme $f_{\bar{i}}^{r}$, on a que $f_{\bar{i}}^{r}(x_{\overline{i'}}^{r})$ appartient à l'ensemble $(n \cdot x_{s_r})\ddagger$ (voir la définition 5.7). Le lemme suivant (lemme 5.11) nous dit que cet élément est supérieur, donc le lemme 5.8 et l'Éq. (5.3) permettent d'aboutir à une contradiction. □

Lemme 5.11. *Soit $(t_1, \dots, t_r)$ un r-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$. Un élément $x \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$ est supérieur, si et seulement si il est zéro, ou bien s'il existe une écriture*

$$x = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$$

*qui satisfait la propriété suivante, qu'on appellera propriété (*M) : les $p_j^i \in R$ sont des éléments homogènes, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, il existe $r_i \in \mathbb{N}_0$, avec $\sum_{j=0}^{r_i} \deg(p_j^i) \geqslant r_i + 1$. Ici $M = \max\{r_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$.*

Démonstration. La direction « seulement si » est claire parce que si x est supérieur, on a $x = r^+ \cdot z$, avec $r^+ \in R^+$ et $z \in \theta_{t_1} \cdots \theta_{t_k}$. Alors si $z = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$ avec les $p_j^i \in R$ des éléments homogènes, on a $x = \sum_{i=1}^{m} r^+ p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$, qui satisfait la propriété (*0).

Pour l'autre sens, soit $x = \sum_{i=1}^{m} p_0^i \otimes p_1^i \otimes \cdots \otimes p_k^i$ satisfaisant la propriété (*M). Comme $p_{r_i}^i = P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) + x_{t_{r_i}} I'_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)$, alors

$$\begin{aligned}x = \sum_{i=1}^{m} & p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}\big(p_{r_i}^i\big) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes p_n^i \\ &+ p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i I'_{t_{r_i}}\big(p_{r_i}^i\big) \otimes x_{t_{r_i}} \otimes \cdots \otimes p_n^i.\end{aligned}$$

Si $p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes p_n^i \neq 0$, alors

$$\sum_{j=0}^{r_i-2} \deg(p_j^i) + \deg(p_{r_i-1}^i P_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)) \geqslant r_i,$$

et si $p_0^i \otimes \cdots \otimes p_{r_i-1}^i I'_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i) \otimes x_{t_{r_i}} \otimes \cdots \otimes p_n^i) \neq 0$, alors

$$\sum_{j=0}^{r_i-2} \deg(p_j^i) + \deg(p_{r_i-1}^i I'_{t_{r_i}}(p_{r_i}^i)) \geqslant r_i.$$

Ceci montre que s'il existe une écriture de x qui satisfait la propriété (*M) alors il existe une autre écriture qui satisfait la propriété (*M−1). Par récurrence on arrive au fait qu'il existe une écriture de x qui satisfait la propriété (*0), ce qui est équivalent à dire que x est supérieur. □

6. Une base de morphismes dans le cas général

Maintenant qu'on a prouvé le théorème 5.1, on finit en donnant une solution du problème 3.1, c'est à dire, on donne une base explicite de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k})$, pour $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_k \in \mathcal{S}$..

Définition 6.1. Si $\bar{i} = (i_1, \dots, i_r) \in I_r$ on définit $\bar{i}^c = (-i_1 + 1, \dots, -i_r + 1) \in I_r$. On définit aussi $\bar{i}(\mathrm{op}) = (i_r, \dots, i_1)$. Finalement on pose $x_{\bar{i}}^g = x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r} \otimes 1 \in \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_r}$ et $x_{\bar{i}}^d = 1 \otimes x_{t_1}^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{t_r}^{i_r} \in \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_r}$.

Soit $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathrm{Hom}(\theta_{t_k}\cdots\theta_{t_1}\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}(-k), R)$ une base de feuilles légères (noter qu'on dit « une » base parce que pour choisir cette base il faut faire un choix du même type que dans 4.5). Alors avec l'isomorphisme explicite donné dans le lemme 3.3, on trouve que

$$\left\{ m \mapsto \sum_{\bar{i}\in I_k} x_{\bar{i}}^g f_\alpha\big((1 \otimes x^d_{\bar{i}^c(\mathrm{op})}) \cdot m\big) \right\}_{\alpha\in A}$$

est une base de $\mathrm{Hom}(\theta_{s_1}\cdots\theta_{s_n}, \theta_{t_1}\cdots\theta_{t_k})$ comme R-module à droite.

7. Application à la catégorie $\mathcal{O}$ de BGG

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple complexe et W son groupe de Weyl. On rappelle que $\mathcal{O}_0$-proj est la sous-catégorie des objets projectifs dans le bloc principal $\mathcal{O}_0$ de la catégorie $\mathcal{O}$. Soit $C = R/(R_+^W)$ l'algèbre de coinvariants. On identifie $\mathbb{C}$ à R/R_+, et on définit $\mathbf{B}^{\mathbb{C}}$ la sous-catégorie pleine de C-mod, d'objets les éléments $B \otimes_R \mathbb{C}$, avec $B \in \mathbf{B}$.

Dans l'article [13], Soergel construit une équivalence explicite de catégories :

$$\mathbb{V} : \mathcal{O}_0\text{-proj} \simeq \mathbf{B}^{\mathbb{C}}. \tag{7.1}$$

D'autre part, à partir de la proposition 8 de l'article [14], on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 7.1. *Si $B, B' \in \mathbf{B}$, alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B') \otimes_R \mathbb{C} \simeq \mathrm{Hom}_C(B \otimes_R \mathbb{C}, B' \otimes_R \mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Avec ces deux résultats et la description de $\mathrm{Hom}_{(R,R)}(B, B')$ faite dans la section 6, on obtient explicitement les morphismes dans la catégorie $\mathcal{O}_0$-proj.

On remarque que $K^b(\mathcal{O}_0\text{-proj}) \cong D^b(\mathcal{O}_0\text{-mod})$, car $\mathrm{gl}\dim \mathcal{O}_0 < \infty$.

Remerciement

Je tiens à remercier Raphaël Rouquier pour son aide dans la rédaction de ce travail.

Références

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, Localization de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris (1) 292 (1981) 15–18.
[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie : chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.
[3] J.L. Brylinski, M. Kashiwara, Kazhdan–Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. 64 (1981) 387–410.
[4] M. Dyer, On some generalisations of the Kazhdan–Lusztig polynomials for "universal" Coxeter systems, J. Algebra 116 (2) (1988) 353–371.
[5] P. Fiebig, The combinatorics of Coxeter categories, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008) 4211–4233.
[6] M. Geck, G. Pfeiffer, Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras, Oxford University Press, Oxford, 2000.
[7] Z. Haddad, A Coxeter group approach to Schubert varieties, in: Infinite-Dimensional Groups with Applications, Berkeley, California, 1984, in: Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 4, Springer, New York/Berlin, 1985, pp. 157–165.
[8] H. Hiller, Geometry of Coxeter Groups, Res. Notes Math., vol. 54, Pitman, Boston, 1982.
[9] D. Kazhdan, G. Lusztig, Schubert varieties and Poincaré duality, Proc. Sympos. Pure Math. 36 (1980).
[10] M. Khovanov, Triply-graded link homology and Hochschild homology of Soergel bimodules, Internat. J. Math. 18 (8) (2007) 869–885.
[11] M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology II, Geom. Topol. 12 (2008) 1387–1425.
[12] N. Libedinsky, Équivalences entre conjectures de Soergel, J. Algebra 320 (7) (2008) 2695–2705.
[13] W. Soergel, Kategorie O, perverse Garben, und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990) 421–445.
[14] W. Soergel, The combinatorics of Harish-Chandra bimodules, J. Reine Angew. Math. 429 (1992) 49–74.
[15] W. Soergel, On the relation between intersection cohomology and representation theory in positive characteristic, J. Pure Appl. Algebra 152 (1–3) (2000) 311–335.
[16] W. Soergel, Kazhdan–Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings, J. Inst. Math. Jussieu 6 (3) (2007) 501–525.